Probabilités

Correction

<u>Exercice 1</u>:

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$, $P_{X>t}(X>s+t)=P(X>s)$. Cette propriété se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

$$P_{X>t}(X>s+t)=\frac{P(X>s+t)}{P(X>t)}=\frac{1-P(X\leqslant s+t)}{1-P(X\leqslant t)}=\frac{1-\int_0^{s+t}\lambda e^{-\lambda x}dx}{1-\int_0^{s+t}\lambda e^{-\lambda x}dx}=\frac{1-[-e^{-\lambda x}]_0^{s+t}}{1-[-e^{-\lambda x}]_0^{t}}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}=P(X>s)$$

<u>Exercice 3</u>:

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées 0, 1, 2, . . . , 2*n*. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros *a*, *b* et *c*, avec $a<b<c$, on élimine les boules de numéros *a* et *c* et on replace dans le sac la boule de numéro *b* ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de *n* tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier *k*, on note $P(D_n=k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro *k*.

1.
   a) Déterminer la loi de la v.a. D_1.

   b) Déterminer la loi de la v.a. D_2.
2. Déterminer $P(D_n=0)$ et $P(D_n=2n)$.
3. Déterminer $P(D_n=1)$ en fonction de *n*.

4. Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $P(D_n = i) = P(D_n = 2n - i)$?
5. Calculer l'espérance de la v.a. D_n en fonction de n.

➢ Cf la correction de Thomas Ravary, Problème 2, p3. Le sujet original est aussi donné.

Exercice 4 :

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef .

1) Posons la variable aléatoire X dont la valeur p est comprise entre *1* et n se définit par : la bonne clé est trouvée au $p^{ième}$ essai.

On a par construction :

$P(X=1)=\frac{1}{n}$,

$P(X=2)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ puisque y arriver du second coup suppose qu'on n'ait pas trouver du premier (et le nombre de clé diminue d'une unité à chaque fois),

$P(X=3)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$

...

$P(X=p)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\ldots\times\frac{1}{n-p+1}=\frac{1}{n}$

Le nombre moyen d'essai est alors de :

$$E(X)=\sum_{p=1}^{n} p\times P(X=p)=\frac{1}{n}\times\sum_{p=1}^{n} p=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

2) La probabilité de trouver la bonne clé reste égale à $\frac{1}{n}$ puisque il n'y a qu'une seule bonne clé.

Soit Y la variable aléatoire qui donne combien d'essai il a fallu faire pour trouver la bonne clé.
Manifestement, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et suit une loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{n}$

Le nombre moyen d'essai est égal à $E(Y)=\frac{1}{p}=n$.